第 53 卷　第 2 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 53　No. 2
2014 年　3 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Mar.　2014

Hilbert K－模上广义框架的不相交性*

董芳芳
（天水师范学院数学与统计学院，甘肃 天水 741001）

摘　要：引入了紧算子代数模（简称 Hilbert K－模）上广义框架，广义框架变换，广义框架算子，（强）不相交等概念，给出并证明了 Hilbert K－模上广义框架（强）不相交的充要条件。

关键词：Hilbert K－模；广义框架；广义框架变换；不相交性

中图分类号：O177.1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2014）02－0148－05

Disjointness of Generalized Frames in Hilbert *K*-Module

DONG Fangfang
（College of Mathematical and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China）

Abstract: The concepts of generalized frames, generalized frame transform and generalized frame operator and (strong) disjointness of generalized frames in Hilbert *K*-modules are introduced. The necessary and sufficient conditions of disjointness of generalized frames in Hilbert *K*-modules are given and proven.

Key words: Hilbert *K*-module; generalized frames; generalized frame transform; disjointness

Hilbert K－模是一种特殊的 Hilbert C^*－模，K 为作用在 Hilbert 空间上的全体紧算子组成的 C^*－代数。显然 $I \notin K$，Bakic 等[1]证明了这种模一定有特殊的标准正交基，其特殊点在于相同基向量的内积为 K 中的一个秩 1 的自伴投影（见定义 2），下面我们先给出与本文有关的 Hilbert K－模的相关概念。

定义 1[1]　设 K 为作用在 Hilbert 空间 H 上的全体紧算子组成的 C^*－代数，M 是复数域 C 上的线性空间，M 是左 K－模，满足：$\mu(kx)=(\mu k)x=k(\mu x)$，其中任意的 $\mu \in C$，$k \in K$，$x \in M$，若 $\langle , \rangle : M \times M \to K$ 具有性质：

(i) $\langle x,x \rangle \geqslant 0, \forall x \in M$;

(ii) $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in M$;

(iii) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle *, \forall x,y \in M$;

(iv) $\langle kx,y \rangle = k\langle x,y \rangle, \forall k \in K, \forall x,y \in M$;

(v) $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle, \forall x,y,z \in M$。

则称（M，$<$，$>$）为准 Hilbert K－模。在 M 上定义范数 $\|x\| := \|\langle x,x \rangle\|^{\frac{1}{2}}$，若 M 在该 $\|\cdot\|$ 意义下完备，就称之为 Hilbert K－模。

定义 2[1]　称序列 $\{v_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 为 Hilbert K－模 M 的标准正交序列，若对任意的 $\lambda, \mu \in \Lambda$，

$$\langle v_\lambda, v_\mu \rangle = \begin{cases} 0, \text{当 } \lambda \neq \mu \text{ 时}; \\ e_{\xi,\xi}, \text{当 } \lambda = \mu \text{ 时} \end{cases}$$

其中 $\xi \in H$，且 $\|\xi\| = 1$（H 为 Hilbert 空间），$e_{\xi,\xi} \in K$ 如下定义：

对任意的 $\eta \in H$，$e_{\xi,\xi}(\eta) = (\eta,\xi)\xi$

同时 $e_{\xi,\xi}^2 = e_{\xi,\xi} = e_{\xi,\xi}^*$，我们称 $e_{\xi,\xi}$ 为 $\{v_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 的支撑投影，其中（ , ）指 Hilbert 空间中元素的内积；若该标准正交序列完备，即 $\overline{\mathrm{span}_K v_\lambda} = M$，任意的 $\lambda \in \Lambda$，则称它为 M 的标准正交基。

定义 3[2]　称 Hilbert K－模 M 中的序列 $\{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 为框架，若存在常数 $c>0, d>0$，使得对任意的 $x \in M$，

$$c\langle x,x \rangle \leqslant \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x,x_\lambda \rangle \langle x_\lambda, x \rangle \leqslant d\langle x,x \rangle$$

若 $c = d = 1$，则称 $\{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 为正规紧框架，若只有右半部等式成立，则称 $\{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 为 Bessel

* 收稿日期：2013－06－17
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10771101）；天水师范学院中青年教师科研资助项目（TSY201201）
作者简介：董芳芳（1981 年生），女；研究方向：泛函分析；E-mail：dff8367848@126.com

序列。

定义 4[2]　设 M_1，M_2 均为 Hilbert K－模，T：$M_1 \to M_2$ 是 K－线性算子（即 $T(kx) = kT(x)$，任意的 $x \in M_1$，$k \in K$），若存在 K－线性算子 T^*：$M_2 \to M_1$，使得对任意的 $x \in M_1$，$y \in M_2$，$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$，则称 T 是可伴算子。

注：若 T 可伴，则 T 必是 K－线性的，且 T 有界，反之不然。

命题 1[2] 设 M_1，M_2 均为 Hilbert K－模，若 T：$M_1 \to M_2$ 是可伴算子，则对任意的 $x \in M_1$，$\langle T(x), T(x)\rangle \leqslant T^2\langle x, x\rangle$。

1　Hilbert K－模上的广义框架

在以往的研究中，都是把这种模上的序列 $\{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 分别定义成了 Bessel 序列，（正规紧）框架，并研究了其性质，由于 $I \notin K$，所以 Hilbert K－模无法膨胀，也就是说引入是没意义的，因此在以往的研究中，只能在 K－模 M 上引入算子 $\theta: M \to M$，使得对任意的 $x \in M$，$\theta(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda}\langle x, e_{\xi,\xi}x_\lambda\rangle v_\lambda$，其中 $\{v_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 为 M 的标准正交基，则 θ 是有闭值域且可伴的算子，$\theta^*(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda}\langle x, v_\lambda\rangle e_{\xi,\xi}x_\lambda$，且 $\theta^*(v_\lambda) = e_{\xi,\xi}x_\lambda$。

受这点的启发，我们考虑 Hilbert K－模 M，N_j，$j \in J$，其中 J 为有限或可数生成的指标集，并且类似地在 M 到 N_j 上引入类似于 θ 的算子列：A_j：$M \to N_j$，使得对任意的 $x \in M$，$A_j(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda}\langle x, x_{j,\lambda}\rangle v_{j,\lambda}$，其中 $\{x_{j.\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$ 为 M 的框架，$\{v_{j.\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$ 为 N_j 的标准正交基，同时 A_j 为可伴算子，且 $A_j^*(g_j) = \sum_{\lambda \in \Lambda}(g_j, v_{j,\lambda})x_{j,\lambda}$，当然，$A_j^*(v_{j,\lambda}) = \sum_{\lambda \in \Lambda}(v_{j,\lambda}, v_{j,\lambda})x_{j,\lambda} = e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}$，我们将 $\{e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}, j \in J, \lambda \in \Lambda\}$ 称为算子序列 $\{A_j, j \in J\}$ 的诱导系列，这样研究的核心就从 K－模 M 上的序列 $\{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 的研究上升到算子序列 $\{A_j, j \in J\}$ 的研究。

我们再由上面 $\{A_j, j \in J\}$ 的引入，显然有

$$\sum_{j \in J}\langle A_j(x), A_j(x)] =$$

$$\sum_{j \in J}\langle \sum_{\lambda \in \Lambda}\langle x, x_{j,\lambda}\rangle v_{j,\lambda}, \sum_{\mu \in \Lambda}\langle x, x_{j,\mu}\rangle v_{j,\mu}\rangle =$$

$$\sum_{j \in J}\sum_{\lambda \in \Lambda}\sum_{\mu \in \Lambda}\langle x, x_{j,\lambda}\rangle\langle v_{j,\lambda}, v_{j,\mu}\rangle\langle x, x_{j,\mu}\rangle =$$

$$\sum_{j \in J}\sum_{\lambda \in \Lambda}\langle x, x_{j,\lambda}\rangle e_{\xi,\xi}\langle x, x_{j,\mu}\rangle$$

这样如何把算子序列 $\{A_j, j \in J\}$ 定义为框架，Bessel 序列，正规紧框架，自然就与 Hilbert K－模上序列 $\{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 定义为框架，Bessel 序列，正规紧框架的定义方法联系起来，当然为了区别起见，这里称为广义框架，广义 Bessel 序列，广义正规紧框架，并且与孙文昌[3-6]引入的 Hilbert 空间上的 g－框架的概念相类似，但引进思路不同。下面我们给出 Hilbert K－模上的广义框架的定义。

定义 5　设 M，N_j 均为 Hilbert K－模，$A_j: M \to N_j$ 为可伴算子，称算子序列 $\{A_j, j \in J\}$ 为 M 关于 N_j 的广义框架，若存在 $A > 0$，$B > 0$，使得对任意的 $x \in M$，有

$$A\langle x, x\rangle \leqslant \sum_{j \in J}\langle A_j(x), A_j(x)\rangle \leqslant B\langle x, x\rangle$$

特别地，若 $A = B = 1$，则称 $\{A_j, j \in J\}$ 为 M 关于 N_j 的广义正规紧框架，将 a, b 分别称为其广义下，上框架界；若只有右半不等式成立，则称 $\{A_j, j \in J\}$ 为 M 关于 N_j 的广义 Bessel 序列。

定义 6[3]　称序列 $\{\Lambda_j, j \in J\}$ 为 M 关于 N_j 的广义标准正交基，若满足：

（i）对任意的 $x \in M$，$\sum_{j \in J}\langle \Lambda_j(x), \Lambda_j(x)\rangle = \langle x, x\rangle$；

（ii）当 $i \neq j$ 时，$\langle \Lambda_i^*(g_i), \Lambda_j^*(g_j)\rangle = 0$；当 $i = j$ 时，$\langle \Lambda_j^*(g_1), \Lambda_j^*(g_2)\rangle = \langle g_1, g_1\rangle$，其中任意的 $g_i, g_j, g_1, g_2 \in \mathbf{N}_j$。

2　Hilbert K－模上广义框架的框架变换

由于在 Hilbert K－模 M 上，$l^2(K)$ 不存在，也就是没有意义将 M 膨胀，从而在以往的研究中，我们在 M 本身上引入了框架 $\{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 的框架变换，并研究了其性质。受这点启发，下面我们在 M 自身上引入广义框架 $\{A_j, j \in J\}$ 的框架变换。

定义 7　设 $\{A_j, j \in J\}$ 为 M 关于 N_j 的广义框架，$\{\Lambda_j, j \in J\}$ 为 M 关于 N_j 的广义标准正交基，引入算子 $\Phi: M \to M$，使得对任意的 $x \in M$，$\Phi(x) = \sum_{j \in J}\Lambda_j^* A_j(x)$，则 Φ 为可伴算子，且 $\Phi^*(x) = \sum_{j \in J}A_j^*\Lambda_j(x)$，我们将 Φ 称为 $\{A_j, j \in J\}$ 的广义框架变换。

根据定义我们易知 Φ 为单射。事实上，由于 $\{A_j, j \in J\}$ 为广义框架，从而存在 $a, b > 0$，使得

$$a\langle x, x\rangle \leqslant \sum_{j \in J}\langle A_j(x), A_j(x)\rangle =$$

$$\langle \sum_{i \in J}\Lambda_i^* A_i(x), \sum_{j \in J}\Lambda_j^* A_j(x)\rangle \leqslant b\langle x, x\rangle$$

即

$$a\langle x, x\rangle \leqslant \langle \Phi(x), \Phi(x)\rangle \leqslant b\langle x, x\rangle$$

因此若 $\Phi(x) = 0$，即就有不等式：$a\langle x, x\rangle \leqslant 0 \leqslant$

$b\langle x,x\rangle$，从而只有 $\langle x,x\rangle=0$，即 $x=0$，从而 Φ 为单射，即 Φ^* 为满射，因此 $\Phi^*\Phi$ 就为双射，即 $\Phi^*\Phi$ 可逆，且 $\Phi^*\Phi=\sum_{j\in J}A_j^*A_j$。

事实上，对任意的 $x\in M$，

$$\langle\Phi^*\Phi(x),x\rangle=\langle\Phi(x),\Phi(x)\rangle=$$
$$\langle\sum_{j\in J}\Lambda_j^*A_j(x),\sum_{i\in J}\Lambda_i^*A_i(x)\rangle=$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in J}\langle\Lambda_j^*A_j(x),\Lambda_i^*A_i(x)\rangle=\sum_{j\in J}\langle A_j(x),A_j(x)\rangle=$$
$$\sum_{j\in J}\langle A_j^*A_j(x),x\rangle=\langle\sum_{j\in J}A_j^*A_j(x),x\rangle$$

记 $S=\Phi^*\Phi$，则 S 为 M 上的可逆自伴的正算子，我们将这里的 S 称为 $\{A_j,j\in J\}$ 的广义框架算子，同时由上面的推导有：当 $\{A_j,j\in J\}$ 为广义正规紧框架时，$S=\Phi^*\Phi=I$；当 $\{A_j,j\in J\}$ 为广义框架时，$aI\leqslant S=\Phi^*\Phi=\sum_{j\in J}A_j^*A_j\leqslant bI$，其中 a,b 分别为 $\{A_j,j\in J\}$ 的下，上广义框架界。

3 Hilbert K－模上广义框架的不相交性

从文献［7］中可以看到：Hilbert 空间上的广义序列的性质与其诱导序列有关，受这点的启发，本节我们把 Hilbert K－模上广义框架 $\{A_j,j\in J\}$ 和 $\{B_j,j\in J\}$ 的（强）不相交和它们各自的诱导序列联系起来，并结合它们各自的广义框架变换的值域，得到了一些重要结论。

定义 8 设 $\{A_j,j\in J\}$ 为 M_1 关于 N_j 的（正规紧）广义框架，$\{B_j,j\in J\}$ 为 M_2 关于 N_j 的（正规紧）广义框架，且其诱导序列分别为 $\{e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda},j\in J,\lambda\in\Lambda\}$ 和 $\{e_{\xi,\xi}y_{j,\lambda},j\in J,\lambda\in\Lambda\}$，称 $\{A_j,j\in J\}$ 与 $\{B_j,j\in J\}$（强）不相交，若 $\{e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}\oplus e_{\xi,\xi}y_{j,\lambda},j\in J,\lambda\in\Lambda\}$ 为 $M_1\oplus M_2$ 的（正规紧）框架。

定理 1 设 $\{A_j,j\in J\}$ 为 M_1 关于 N_j 的正规紧广义框架，$\{B_j,j\in J\}$ 为 M_2 关于 N_j 的正规紧广义框架，则 $\{A_j,j\in J\}$ 与 $\{B_j,j\in J\}$ 强不相交当且仅当对任意的 $x\in M_1$，$y\in M_2$，$\sum_{j\in J}B_j^*A_j(x)=0$，$\sum_{j\in J}A_j^*B_j(y)=0$，并且这两个等式若有一个成立，则另一个必成立。

证明 我们结合 K－模上框架理论知识有：广义正规紧框架 $\{A_j,j\in J\}$ 和 $\{B_j,j\in J\}$ 强不相交当且仅当 $\{e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}\oplus e_{\xi,\xi}y_{j,\lambda},j\in J,\lambda\in\Lambda\}$ 为 $M_1\oplus M_2$ 的正规紧框架。

必要性：若 $\{e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}\oplus e_{\xi,\xi}y_{j,\lambda},j\in J,\lambda\in\Lambda\}$ 为 $M_1\oplus M_2$ 的正规紧框架，则对任意的 $x\in M_1$，$y\in M_2$，

$$x\oplus y=\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x\oplus y,e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}\oplus e_{\xi,\xi}y_{j,\lambda}\rangle e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}\oplus e_{\xi,\xi}y_{j,\lambda}=$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x\oplus y,A_j^*(v_{j,\lambda})\oplus B_j^*(v_{j,\lambda})\rangle A_j^*(v_{j,\lambda})\oplus B_j^*(v_{j,\lambda})=$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}(\langle x,A_j^*(v_{j,\lambda})\rangle+\langle y,B_j^*(v_{j,\lambda})\rangle)A_j^*(v_{j,\lambda})\oplus B_j^*(v_{j,\lambda})=$$
$$(\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}(\langle x,A_j^*(v_{j,\lambda})\rangle A_j^*(v_{j,\lambda})+\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle y,B_j^*(v_{j,\lambda})\rangle A_j^*(v_{j,\lambda}))\oplus$$
$$(\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}(\langle x,A_j^*(v_{j,\lambda})\rangle B_j^*(v_{j,\lambda})+\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle y,B_j^*(v_{j,\lambda})\rangle B_j^*(v_{j,\lambda}))=$$
$$(\sum_{j\in J}A_j^*(\sum_{\lambda\in\Lambda}(\langle A_j(x),v_{j,\lambda}\rangle v_{j,\lambda})+\sum_{j\in J}A_j^*(\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle B_j(y),v_{j,\lambda}\rangle v_{j,\lambda}))\oplus$$
$$(\sum_{j\in J}B_j^*(\sum_{\lambda\in\Lambda}(\langle A_j(x),v_{j,\lambda}\rangle v_{j,\lambda})+\sum_{j\in J}B_j^*(\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle B_j(y),v_{j,\lambda}\rangle v_{j,\lambda}))=$$
$$(\sum_{j\in J}A_j^*A_j(x)+\sum_{j\in J}A_j^*B_j(y))\oplus(\sum_{j\in J}B_j^*A_j(x)+\sum_{j\in J}B_j^*B_j(y))=$$
$$(x+\sum_{j\in J}A_j^*B_j(y))\oplus(\sum_{j\in J}B_j^*A_j(x)+y)$$

从而有 $\sum_{j\in J}B_j^*A_j(x)=0$，$\sum_{j\in J}A_j^*B_j(y)=0$。

充分性：若 $\sum_{j\in J}B_j^*A_j(x)=0$，$\sum_{j\in J}A_j^*B_j(y)=0$，则

$$\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x\oplus y,e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}\oplus e_{\xi,\xi}y_{j,\lambda}\rangle\cdot$$
$$\langle e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}\oplus e_{\xi,\xi}y_{j,\lambda},x\oplus y\rangle=$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}(\langle x,A_j^*(v_{j,\lambda})\rangle+\langle y,B_j^*(v_{j,\lambda})\rangle)\cdot$$
$$(\langle A_j^*(v_{j,\lambda}),x\rangle+\langle B_j^*(v_{j,\lambda}),y\rangle)=$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}(\langle x,A_j^*(v_{j,\lambda})\rangle\langle A_j^*(v_{j,\lambda}),x\rangle+$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x,A_j^*(v_{j,\lambda})\rangle\langle B_j^*(v_{j,\lambda}),y\rangle+$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle y,B_j^*(v_{j,\lambda})\rangle\langle A_j^*(v_{j,\lambda}),x\rangle+$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle y,B_j^*(v_{j,\lambda})\rangle\langle B_j^*(v_{j,\lambda}),y\rangle=$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}(\langle A_j(x),v_{j,\lambda}\rangle\langle v_{j,\lambda},A_j(x)\rangle+$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle A_j(x),v_{j,\lambda}\rangle\langle v_{j,\lambda},B_j(y)\rangle+$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle B_j(y),v_{j,\lambda}\rangle\langle v_{j,\lambda},A_j(x)\rangle+$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle B_j(y),v_{j,\lambda}\rangle\langle v_{j,\lambda},B_j(y)\rangle=$$
$$\sum_{j\in J}\langle A_j(x),A_j(x)\rangle+\sum_{j\in J}\langle A_j(x),B_j(y)\rangle+$$
$$\sum_{j\in J}\langle B_j(y),A_j(x)\rangle+\sum_{j\in J}\langle B_j(y),B_j(y)\rangle=$$
$$\langle\sum_{j\in J}A_j^*A_j(x),x\rangle+\langle\sum_{j\in J}B_j^*A_j(x),y\rangle+$$
$$\langle\sum_{j\in J}A_j^*B_j(y),x\rangle+\langle\sum_{j\in J}B_j^*B_j(y),y\rangle=$$
$$\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle=\langle x\oplus y,x\oplus y\rangle$$

即 $\{e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}\oplus e_{\xi,\xi}y_{j,\lambda},j\in J,\lambda\in\Lambda\}$ 为 $M_1\oplus M_2$ 的正规紧框架，本定理得证。

推论 1 设正规紧广义框架 $\{A_j,j\in J\}$ 和 $\{B_j,j\in J\}$ 的广义框架变换分别为 Φ_1 和 Φ_2，则 $\{A_j,j$

$\in J\}$ 和 $\{B_j, j \in J\}$ 强不相交当且仅当 $\Phi_1^* \Phi_2 = \Phi_2^* \Phi_1 = 0$。

证明　由于对任意的 $x \in M_1$，$y \in M_2$，$\Phi_1(x) = \sum_{j \in J} \Lambda_j^* A_j(x)$，$\Phi_2(y) = \sum_{j \in J} \Lambda_j^* B_j(y)$，其中 $\{\Lambda_j, j \in J\}$ 为 $M_1 \cap M_2$ 关于 N_j 的 g – 标准正交基，从而 $\Phi_2^* \Phi_1(x) = \Phi_2^*(\sum_{j \in J} \Lambda_j^* A_j(x)) = \sum_{i \in J} B_i^* \Lambda_i(\sum_{j \in J} \Lambda_j^* A_j(x)) = \sum_{i \in J} B_i^* A_i(x)$，同理，$\Phi_1^* \Phi_2(y) = \sum_{i \in J} A_i^* B_i(y)$，因此，$\sum_{j \in J} B_j^* A_j(x) = 0$，$\sum_{j \in J} A_j^* B_j(y) = 0$ 当且仅当 $\Phi_1^* \Phi_2 = \Phi_2^* \Phi_1 = 0$。另外，若 $\Phi_1^* \Phi_2 = 0$，则 $(\Phi_1^* \Phi_2)^* = 0$，即 $\Phi_2^* \Phi_1 = 0$，也即上面等式若有一个成立，另一个必然也成立。

定理 2　设 $\{A_j, j \in J\}$ 为 M_1 关于 N_j 的 g – 框架，$\{B_j, j \in J\}$ 为 M_2 关于 N_j 的广义框架，其广义框架变换分别为 Φ_1 和 Φ_2，则 $\{A_j, j \in J\}$ 与 $\{B_j, j \in J\}$ 不相交当且仅当 $\Phi_1(M_1) \cap \Phi_2(M_2) = \{0\}$，且 $\Phi_1(M_1) + \Phi_2(M_2)$ 是闭的，其中 $\Phi_1(M_1)$ 和 $\Phi_2(M_2)$ 分别为 Φ_1 和 Φ_2 的值域。

证明　由于 $\{e_{\xi,\xi} x_{j,\lambda} \oplus e_{\xi,\xi} y_{j,\lambda}, j \in J, \lambda \in \Lambda\}$ 为 $M_1 \oplus M_2$ 的框架，则存在 $a > 0, b > 0$，使得

$$a\langle x \oplus y, x \oplus y\rangle \leqslant \sum_{j \in J} \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x \oplus y, e_{\xi,\xi} x_{j,\lambda} \oplus e_{\xi,\xi} y_{j,\lambda}\rangle \langle e_{\xi,\xi} x_{j,\lambda} \oplus e_{\xi,\xi} y_{j,\lambda}, x \oplus y\rangle \leqslant b\langle x \oplus y, x \oplus y\rangle$$

而

$$\begin{aligned}
&\sum_{j \in J} \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x \oplus y, e_{\xi,\xi} x_{j,\lambda} \oplus e_{\xi,\xi} y_{j,\lambda}\rangle \cdot \langle e_{\xi,\xi} x_{j,\lambda} \oplus e_{\xi,\xi} y_{j,\lambda}, x \oplus y\rangle = \\
&\sum_{j \in J} \sum_{\lambda \in \Lambda} (\langle x, A_j^*(v_{j,\lambda})\rangle + \langle y, B_j^*(v_{j,\lambda})\rangle) \cdot (\langle A_j^*(v_{j,\lambda}), x\rangle + \langle B_j^*(v_{j,\lambda}), y\rangle) = \\
&\sum_{j \in J} \sum_{\lambda \in \Lambda} (\langle x, A_j^*(v_{j,\lambda})\rangle \langle A_j^*(v_{j,\lambda}), x\rangle + \\
&\sum_{j \in J} \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, A_j^*(v_{j,\lambda})\rangle \langle B_j^*(v_{j,\lambda}), y\rangle = \\
&\sum_{j \in J} \langle A_j(x), A_j(x)\rangle + \sum_{j \in J} \langle A_j(x), B_j(y)\rangle + \\
&\sum_{j \in J} \langle B_j(y), A_j(x)\rangle + \sum_{j \in J} \langle B_j(y), B_j(y)\rangle = \\
&\langle \sum_{i \in J} \Lambda_i^* A_i(x), \sum_{j \in J} \Lambda_j^* A_j(x)\rangle + \\
&\langle \sum_{i \in J} \Lambda_i^* A_i(x), \sum_{j \in J} \Lambda_j^* B_j(y)\rangle + \\
&\langle \sum_{i \in J} \Lambda_i^* B_i(y), \sum_{j \in J} \Lambda_j^* A_j(x)\rangle + \\
&\langle \sum_{i \in J} \Lambda_i^* B_i(y), \sum_{j \in J} \Lambda_j^* B_j(x)\rangle = \\
&\langle \Phi_1(x), \Phi_1(x)\rangle + \langle \Phi_1(x), \Phi_2(y)\rangle + \\
&\langle \Phi_2(y), \Phi_1(x)\rangle + \langle \Phi_2(y), \Phi_2(y)\rangle = \\
&\langle \Phi_1(x) + \Phi_2(y), \Phi_1(x) + \Phi_2(y)\rangle
\end{aligned}$$

即，$\{e_{\xi,\xi} x_{j,\lambda} \oplus e_{\xi,\xi} y_{j,\lambda}, j \in J, \lambda \in \Lambda\}$ 为 $M_1 \oplus M_2$ 的框架当且仅当存在 $a > 0, b > 0$，使得

$$a\langle x \oplus y, x \oplus y\rangle \leqslant \langle \Phi_1(x) + \Phi_2(y), \Phi_1(x) + \Phi_2(y)\rangle \leqslant b\langle x \oplus y, x \oplus y\rangle \quad (*)$$

必要性：反设 $0 \neq z \in \Phi_1(M_1) \cap \Phi_2(M_2)$，则存在 $u \in M_1$，$v \in M_2$，使得 $\Phi_1(u) = \Phi_2(v) = z$，不妨取 $w = -v \in M_2$，则

$\Phi_1(u) + \Phi_2(w) = \Phi_1(u) - \Phi_2(v) = z - z = 0$，从而要使得（$*$）式成立，即 $a\langle u \oplus w, u \oplus w\rangle \leqslant \langle \Phi_1(u) + \Phi_2(w), \Phi_1(u) + \Phi_2(w)\rangle = 0 \leqslant b\langle u \oplus w, u \oplus w\rangle$，只能有 $\langle u \oplus w, u \oplus w\rangle = 0$，即 $\langle u, u\rangle + \langle w, w\rangle = 0$，而 $\langle u, u\rangle \geqslant 0, \langle w, w\rangle \geqslant 0$，因此 $u = w = 0$，即 $\Phi_1(u) = \Phi_1(0) = 0, \Phi_2(v) = \Phi_2(-w) = \Phi_2(0) = 0$，也即 $z = 0$，这与反设矛盾，从而只有 $\Phi_1(M_1) \cap \Phi_2(M_2) = \{0\}$。

充分性：我们引入 K – 线性算子：$T: \Phi_1(M_1) \oplus \Phi_2(M_2) \to \Phi_1(M_1) + \Phi_2(M_2)$，使得对 $\forall a \in \Phi_1(M_1), \forall b \in \Phi_2(M_2)$，$T(a \oplus b) = a + b$，则 T 是定义好的。

事实上，若 $a \oplus b = 0$，即 $0 = \langle a \oplus b, a \oplus b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle b, b\rangle$，而 $\langle a, a\rangle \geqslant 0, \langle b, b\rangle \geqslant 0$，从而只有 $a = b = 0$，即 $a + b = 0$。且 T 是可伴算子，$T^*: \Phi_1(M_1) + \Phi_2(M_2) \to \Phi_1(M_1) \oplus \Phi_2(M_2)$，使得 $T^*(e + f) = (e + f) \oplus (e + f)$，其中任意的 $e \in \Phi_1(M_1), f \in \Phi_2(M_2)$。

我们先证明 T 是单射：对任意的 $a \in \Phi_1(M_1)$，$b \in \Phi_2(M_2)$，若 $a + b = 0$，即 $a = -b$，则存在 $x \in M_1, y \in M_2$，使得 $\Phi_1(x) = a = -b = -\Phi_2(y)$，即 $\Phi_1(x) = -\Phi_2(y) = \Phi_2(-y)$，而 $\Phi_1(M_1) \cap \Phi_2(M_2) = \{0\}$，从而只有 $\Phi_1(x) = \Phi_2(-y) = 0$，即 $a = b = 0$，从而 $a \oplus b = 0$，即 T 是单射。

我们再证明 T 是满射，即 T^* 是单射。事实上，对 $\forall e \in \Phi_1(M_1), \forall f \in \Phi_2(M_2)$，若 $(e + f) \oplus (e + f) = 0$，则 $0 = \langle e + f) \oplus (e + f), e + f) \oplus (e + f)\rangle = 2\langle e + f, e + f\rangle$，从而只有：$e + f = 0$。

综上，我们知 T 是双射，即 T 为可逆算子，根据文献［8］的相关知识，有：

$$\|T^{-1}\|^{-2}\langle a \oplus b, a \oplus b\rangle \leqslant \langle T(a \oplus b), T(a \oplus b)\rangle \leqslant \|T\|^2\langle a \oplus b, a \oplus b\rangle$$

即

$$\|T^{-1}\|^{-2}\langle a \oplus b, a \oplus b\rangle \leqslant \langle a + b, a + b\rangle \leqslant \|T\|^2\langle a \oplus b, a \oplus b\rangle$$

从而对任意的 $x \in M_1, y \in M_2$，显然：$\Phi_1(x) \in$

$\Phi_1(M_1),\Phi_2(y)\in\Phi_2(M_2)$，则由上式，有

$$\|T^{-1}\|^{-2}\langle\Phi_1(x)\oplus\Phi_2(y),\Phi_1(x)\oplus\Phi_2(y)\rangle\leqslant$$
$$\langle\Phi_1(x)+\Phi_2(y),\Phi_1(x)+\Phi_2(y)\rangle\leqslant$$
$$\|T\|^2\langle\Phi_1(x)\oplus\Phi_2(y),\Phi_1(x)\oplus\Phi_2(y)\rangle$$

即

$$\|T^{-1}\|^{-2}\langle\Phi_1(x),\Phi_1(x)\rangle+\langle\Phi_2(y),\Phi_2(y)\rangle\leqslant$$
$$\langle\Phi_1(x)+\Phi_2(y),\Phi_1(x)+\Phi_2(y)\rangle\leqslant$$
$$\|T\|^2\langle\Phi_1(x),\Phi_1(x)\rangle+\langle\Phi_2(y),\Phi_2(y)\rangle$$

又由于 $\{A_j,j\in J\}$ 和 $\{B_j,j\in J\}$ 均为广义框架，则存在 $a,b,c,d>0$，使得

$$a\langle x,x\rangle\leqslant\sum_{j\in J}\langle A_j(x),A_j(x)\rangle=$$
$$\langle\Phi_1(x),\Phi_1(x)\rangle\leqslant b\langle x,x\rangle;$$
$$c\langle x,x\rangle\leqslant\sum_{j\in J}\langle B_j(x),B_j(x)\rangle=$$
$$\langle\Phi_2(x),\Phi_2(x)\rangle\leqslant d\langle x,x\rangle$$

从而

$$\min\{a,c\}(\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle)\leqslant$$
$$\langle\Phi_1(x),\Phi_1(x)\rangle+\langle\Phi_2(y),\Phi_2(y)\rangle\leqslant$$
$$\max\{b,d\}(\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle)$$

即

$$\|T^{-1}\|^{-2}\min\{a,c\}\langle x\oplus y,x\oplus y\rangle\leqslant$$
$$\langle\Phi_1(x)+\Phi_2(y),\Phi_1(x)+\Phi_2(y)\rangle\leqslant$$
$$\|T\|^2\max\{b,d\}(\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle)=$$
$$\|T\|^2\max\{b,d\}\langle x\oplus y,x\oplus y\rangle$$

从而 $\{e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}\oplus e_{\xi,\xi}y_{j,\lambda},j\in J,\lambda\in\Lambda\}$ 为 $M_1\oplus M_2$ 的框架，即 $\{A_j,j\in J\}$ 与 $\{B_j,j\in J\}$ 不相交。

另外，由 T 的可逆性知，$\Phi_1(M_1)+\Phi_2(M_2)$ 是闭的。

参考文献：

[1] BAKIC D, GULJAS B. Hilbert $C*$-modules over $C*$-algebras of compact operators [J]. Acta Sci Math (Szeged), 2002, 68: 249 – 269.

[2] FRANK M, LARSON D R. Frames in Hilbert $C*$-modules and $C*$-algebras [J]. Operator Theory, 2002, 48: 203 – 233.

[3] SUN W C. G-frames and g-Riesz bases [J]. Math Anal Appl, 2006, 322(1): 437 – 452.

[4] YAO X Y. Perturbations of g-frames in Hilbert spaces [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2008, 28(4):1037 – 1041.

[5] HAN D G, LARSON D R. Bases and group representations [J]. Memoirs Amer Math Soc, 2000, 147 (697): 46 – 50.

[6] SUN W C. Stability of g-frames [J]. Math Anal Appl, 2007, 326(2): 858 – 868.

[7] 肖秀梅,孟彬,靳世华. Hilbert K – 模上 g – 框架的稳定性[J]. 南京大学学报:数学半年刊,2010, 27(1): 105 – 115.

[8] RONALD G, DOUGLAS. Banach algebra techniques in operator theory [M]. 2nd ed. Springer-Verlag, 1997.

(上接第 147 页)

[14] 贾良文,吴超羽,任杰,等. 珠江口磨刀门枯季水文特征及河口动力过程[J]. 水科学进展,2006,17(1):82 – 88.

[15] 贾良文,吴超羽,雷亚平,等. 珠江口磨刀门枯季表层沉积物特征[J]. 海洋工程,2005,23(1):62 – 68.

[16] KIM S C, MAA J P Y, WRIGHT L D, et al. Estimating bottom stress in tidal boundary layer from acoustic Doppler velocimeter data[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2000,126(6):399 – 406.

[17] GORING D G, NIKORA V I. Despiking acoustic doppler velocimeter data[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2002,128(1):117 – 126.

[18] 原野,赵亮,魏皓,等. 利用 ADCP 和 LISST – 100 仪观测悬浮物浓度的研究[J]. 海洋学报,2008,30(3):48 – 55.

[19] SALEHI M, STROM K B. Relationship between Acoustic Backscatter Strength and Suspended Sediment Concentration Using a 6 MHz Nortek Vector Velocimeter[C] //World Environmental and Water Resources Congress, Challenges of Change. ASCE Conf Proc, 2010: 1676 – 1682.

[20] MAA J P Y, KWOM J I. Using ADV for cohesive sediment settling velocity measurements [J]. Estuarine, Coastal and Shelf Science, 2007,73 (1/2):351 – 354.

[21] VOULGARIS G, MEYERS S T. Temporal variability of hydrodynamics, sediment concentration and sediment settling velocity in a tidal creek[J]. Continental Shelf Research, 2004,24:1659 – 1683.